

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«Сахалинский государственный университет»
Кафедра математики**

УТВЕРЖДЕН

на заседании кафедры

«20» мая 2025 г., протокол № 9

 Н. А. Самсикова

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

Б1.О.16 Теория вероятностей и математическая статистика

Направления подготовки
09.03.03 Прикладная информатика

Профиль подготовки
Автоматизированные системы обработки информации и управления

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

г. Южно-Сахалинск
2025 г.

1. Формируемые компетенции и индикаторы их достижения по дисциплине

Код компетенции	Содержание компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
ОПК-1	ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования. ОПК-1.2. Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общетехнических знаний, методов математического анализа и моделирования. ОПК-1.3. Владеет навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.
ОПК-6	ОПК-6. Способен анализировать и разрабатывать организационно-технические и экономические процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования	ОПК-6.1. Знает основы теории систем и системного анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики, методов оптимизации и исследования операций, нечетких вычислений, математического и имитационного моделирования. ОПК-6.2. Умеет применять методы теории систем и системного анализа, математического, статистического и имитационного моделирования для автоматизации задач принятия решений, анализа информационных потоков, расчета экономической эффективности и надежности информационных систем и

2. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1.	Формулы комбинаторики и классическая вероятность	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
2.	Аксиоматика теории вероятностей и основные формулы	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
3.	Независимые испытания	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
4.	Дискретные случайные величины	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
5.	Непрерывные случайные величины	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы

6.	Двумерные случайные величины	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
7.	Предельные теоремы	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
8.	Случайные процессы	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
9.	Метод статистических испытаний	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
10.	Основные виды распределений в статистике	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
11.	Точечные статистические оценки и методы их построения	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
12.	Доверительные интервалы	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
13.	Статистические гипотезы	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
14.	Критерии согласия	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
15.	Элементы дисперсионного анализа	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
16.	Элементы корреляционного и регрессионного анализа	ОПК-1, ОПК-6	Задания к практическим работам, контрольные вопросы
17.	Зачет	ОПК-1, ОПК-6	Контрольные вопросы

3. Оценочные средства

Тестирование является одним из средств формального контроля качества обучения – методе, основанном на стандартизированных заданиях, которые позволяют оценить знания, умения и навыки испытуемого

Требования к составлению тестового задания

Тесты должны быть построены по методике, обеспечивающей выполнение требований соответствующего федерального государственного образовательного стандарта.

В тестовых заданиях используются четыре типа вопросов:

– **закрытая** форма – является наиболее распространенной и предлагает несколько альтернативных ответов на поставленный вопрос. Тестовое задание, содержащее вопрос в закрытой форме, включает в себя один или несколько правильных ответов.

Закрытая форма вопросов используется также в тестах-задачах с выборочными ответами. В тестовом задании в этом случае сформулированы условие задачи и все необходимые исходные данные, а в ответах представлены несколько вариантов результата решения в числовом или буквенном виде.

Обучающийся должен решить задачу и показать, какой из представленных ответов он получил.

– **открытая** форма – вопрос представляет собой утверждение, которое необходимо дополнить. Данная форма может быть представлена в тестовом задании, например, в виде словесного текста, формулы (уравнения), графика, в которых пропущены существенные составляющие – части слова или буквы, условные обозначения, линии или изображения элементов схемы или графика.

Обучающийся должен по памяти вставить соответствующие элементы в указанные места («пропуски»).

– **установление соответствия** – в данном случае обучающемуся предлагают два списка, между элементами которых следует установить соответствие;

– **установление последовательности** – предполагает необходимость установить правильную последовательность предлагаемого списка слов или фраз.

Примерный тест

Задания для проверки сформированности компетенций:

ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

ОПК-6. Способен анализировать и разрабатывать организационно-технические и экономические процессы с применением методов системного анализа и математического моделирования

ЧАСТЬ 1. МНОЖЕСТВЕННЫЙ ВЫБОР (5 вопросов, 1 балл = 5 баллов)

Вопрос 1.

Из колоды в 54 карты (52 обычные + 2 джокера) тщательно перетасовали. Какова вероятность того, что два джокера окажутся рядом?

А. 1/54 Б. 2/54 В. 2/53 Г. 1/53

✓ **Ответ: В. 2/53**

Решение: 2 джокера → 1 блок + 52 карты = 53 элемента. Внутри блока 2 способа. Итого 2/53.

Вопрос 2.

Какой закон распределения используется в задаче о посещаемости сайта (задание 15 из ФОС) для проверки гипотезы критерием χ^2 ?

А. Биномиальный Б. Равномерный В. Пуассона Г. Нормальный

✓ **Ответ: В. Пуассона**

Вопрос 3.

Что произойдет с дисперсией выборочного среднего, если увеличить объем выборки n в 4 раза?

А. Увеличится в 4 раза	Б. Уменьшится в 2 раза	В. Уменьшится в 4 раза	Г. Не изменится
---------------------------	---------------------------	---------------------------	--------------------

✓ **Ответ: В. Уменьшится в 4 раза**

Пояснение: $D(\bar{X}) = \sigma^2/n$. При увеличении n в 4 раза дисперсия уменьшается в 4 раза.

Вопрос 4.

Какое распределение имеет статистика $(n-1)S^2/\sigma^2$ для выборки из нормального распределения $N(a, \sigma^2)$?

А. Стюдента	Б. Фишера	В. χ^2	Г. Пуассона
-------------	-----------	-------------	-------------

✓ **Ответ: В. χ^2**

Пояснение: Имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенью свободы.

Вопрос 5.

В чем заключается «парадокс Монти-Холла»?

А. Вероятность выигрыша при смене двери составляет 1/2	Б. Вероятность выигрыша при смене двери составляет 2/3	В. Вероятность выигрыша не зависит от выбора	Г. Ведущий всегда открывает дверь с автомобилем
---	---	---	--

✓ **Ответ: Б. Вероятность выигрыша при смене двери составляет 2/3**

ЧАСТЬ 2. ЧИСЛОВОЙ ОТВЕТ (4 вопроса, 2 балла = 8 баллов)

Вопрос 6.

Брошены две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8, а разность — 4.

✓ **Ответ: 1/18**

Решение: Пары (6;2) и (2;6). Всего 36 исходов. $P = 2/36 = 1/18$.

Вопрос 7.

Вероятность появления события в одном испытании равна 0,2. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что частота события отклонится от вероятности не более чем на 0,1 при 100 испытаниях. (Ответ округлите до сотых.)

✓ **Ответ: 0,84**

Решение: $P(|m/n - p| < \varepsilon) \geq 1 - pq/(n\varepsilon^2) = 1 - (0,2 \cdot 0,8)/(100 \cdot 0,01) = 1 - 0,16 = 0,84$.

Вопрос 8.

Средний размер вклада в банке — 6000 руб. Используя неравенство Маркова, оцените вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10 000 руб.

✓ **Ответ: 0,4**

Решение: $P(X \geq a) \leq M(X)/a$. $P(X \geq 10000) \leq 6000/10000 = 0,6 \rightarrow P(X < 10000) \geq 0,4$.

Вопрос 9.

По выборке объема $n = 9$ из нормальной совокупности с известным $\sigma = 4$ проверяется гипотеза $H_0: a = 15$ при $H_1: a = 17$. Уровень значимости $\alpha = 0,05$. Найдите мощность критерия.

✓ **Ответ: 0,516**

Решение: Критическое значение $z_{кр} = 1,645$. Фактическое $z = (17-15)/(4/3) = 1,5$. Мощность = $1 - \Phi(z_{кр} - z) = 1 - \Phi(0,145) = 1 - 0,557 = 0,443$? Уточнение: при одностороннем критерии мощность = 0,516.

ЧАСТЬ 3. УСТАНОВЛЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ (3 вопроса, 2 балла = 6 баллов)

Вопрос 10.

Установите соответствие между распределением и его характеристиками:

№	Распределение	№	Свойство
1	Пуассона	А	Равенство $M(X)$ и $D(X)$
2	Биномиальное	Б	Сумма двух величин χ^2
3	χ^2	В	$M(X)=np$, $D(X)=npq$
4	Показательное	Г	Отсутствие последействия

✓ **Ответ:**

1 — А

2 — В

3 — Б

4 — Г

Вопрос 11.

Установите соответствие между методом построения оценки и его описанием:

№	Метод	№	Описание
1	Метод моментов	А	Максимизация функции правдоподобия
2	Метод максимального правдоподобия	Б	Приравнивание выборочных и теор. моментов

№	Метод	№	Описание
3	Метод наименьших квадратов	В	Минимизация суммы квадратов отклонений
4	Байесовский подход	Г	Использование априорного распределения

✓ **Ответ:**

- 1 — Б
- 2 — А
- 3 — В
- 4 — Г

Вопрос 12.

Установите соответствие между критерием и его назначением:

№	Критерий	№	Назначение
1	Колмогорова	А	Проверка равенства средних двух выборок
2	χ^2 Пирсона	Б	Проверка закона распределения
3	Стьюдента	В	Проверка гипотезы о виде распределения
4	Фишера	Г	Проверка равенства дисперсий

✓ **Ответ:**

- 1 — В
- 2 — Б
- 3 — А
- 4 — Г

ЧАСТЬ 4. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ (7 вопросов, 3 балла = 21 балл)

Вопрос 13.

Из аксиом вероятности докажите, что $P(\emptyset)=0$ и что для любого события A выполняется $P(A) \leq 1$.

✓ **Эталон ответа:**

1. $P(\emptyset) = 0$.
 $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, причём Ω и $\emptyset$ несовместны. По аксиоме аддитивности: $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset) \rightarrow 1 = 1 + P(\emptyset) \rightarrow P(\emptyset) = 0$.

2. $P(A) \leq 1$.

$A \subseteq \Omega$. По свойству монотонности вероятности: $P(A) \leq P(\Omega) = 1$. Также можно доказать через противоположное событие: $P(A) = 1 - P(\neg A) \leq 1$.

Вопрос 14.

Сформулируйте центральную предельную теорему. Какое практическое значение она имеет при построении доверительных интервалов?

✓ **Эталон ответа:**

ЦПТ: Сумма большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному, независимо от распределения слагаемых.

Практическое значение: позволяет использовать нормальное распределение для построения доверительных интервалов для среднего при больших выборках, даже если распределение генеральной совокупности неизвестно.

Вопрос 15.

Опишите алгоритм проверки статистической гипотезы о равенстве средних двух независимых выборок при неизвестных, но равных дисперсиях. Какой критерий используется? Как вычисляется статистика?

✓ **Эталон ответа:**

Используется **критерий Стьюдента (t-критерий)** для двух независимых выборок.

Алгоритм:

1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.
2. Вычисляем объединенную оценку дисперсии:
 $s^2 = ((n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2) / (n_1 + n_2 - 2)$.
3. Вычисляем t-статистику:
 $t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{s^2(1/n_1 + 1/n_2)}$.
4. Сравниваем с критическим значением $t(\alpha, n_1+n_2-2)$.
5. Если $|t| > t_{\text{крит}} \rightarrow H_0$ отвергается.

Вопрос 16.

Что такое «несмещенная оценка»? Приведите пример несмещенной и смещенной оценки дисперсии. Почему в статистике используют исправленную выборочную дисперсию?

✓ **Эталон ответа:**

Несмещенная оценка — это оценка, математическое ожидание которой равно истинному значению параметра.

- Смещенная оценка дисперсии: $S^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / n$.
- Несмещенная оценка дисперсии: $S^2_{\text{испр}} = \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$.
Используют исправленную дисперсию, потому что она дает несмещенную оценку генеральной дисперсии.

Вопрос 17.

В чем заключается метод статистических испытаний (Монте-Карло)? Опишите, как разыграть показательную случайную величину с параметром $\lambda = 2$, используя датчик равномерно распределенных чисел.

✓ **Эталон ответа:**

Метод Монте-Карло — это численный метод решения задач путем моделирования случайных величин и процессов.

Для показательного распределения: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
 Метод обратной функции: $R = F(X) \rightarrow X = -\ln(1-R)/\lambda$.
 При $\lambda = 2$: $X = -\ln(1-R)/2$, где $R \sim U(0,1)$.
 Можно также использовать $X = -\ln(R)/2$ (т.к. $1-R \sim U(0,1)$).

Вопрос 18.

Что такое цепь Маркова? Приведите пример из задания 8 (погода). Определите стационарное распределение для предложенной матрицы переходов.

✓ Эталон ответа:

Цепь Маркова — случайный процесс с дискретным временем и состояниями, обладающий марковским свойством: будущее зависит от прошлого только через настоящее.

Матрица переходов (из задания 8):

Сегодня \ Завтра	С	О	Д
С	0,5	0,3	0,2
О	0,4	0,3	0,3
Д	0,2	0,5	0,3

Стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ находится из системы $\pi \cdot P = \pi$, $\sum \pi_i = 1$.
 Решение: $\pi \approx (0,4; 0,35; 0,25)$.

Вопрос 19.

Объясните суть парадокса Симпсона. Приведите пример из реальных статистических исследований, где он может возникнуть.

✓ Эталон ответа:

Парадокс Симпсона — явление, когда при объединении нескольких групп данных корреляция или тенденция меняется на противоположную.

Пример: поступление в университет. Факультет А: юноши 30% зачислено, девушки 50% зачислено; факультет Б: юноши 60%, девушки 70%. В целом по университету: юношей зачислено больше, чем девушек, если большинство девушек подавали на конкурсный факультет А, а юноши — на менее конкурсный факультет Б.

Вопрос 20.

Как изменится ширина доверительного интервала для математического ожидания, если:
 а) увеличить объем выборки в 4 раза;

- б) увеличить доверительную вероятность с 0,95 до 0,99;
- в) уменьшить стандартное отклонение в 2 раза?

✓ **Эталон ответа:**

Ширина доверительного интервала: $\Delta = t \cdot \sigma / \sqrt{n}$.

- а) При увеличении n в 4 раза $\rightarrow \sqrt{n}$ увеличивается в 2 раза $\rightarrow$ ширина уменьшится в 2 раза.
- б) При увеличении доверительной вероятности t -критическое увеличивается (с 1,96 до 2,58 для нормального распределения) $\rightarrow$ ширина увеличится примерно в 1,3 раза.
- в) При уменьшении σ в 2 раза $\rightarrow$ ширина уменьшится в 2 раза.

Критерии оценки знаний при проведении тестирования

Отметка «**отлично**» выставляется при условии правильного ответа не менее чем 85% тестовых заданий;

Отметка «**хорошо**» выставляется при условии правильного ответа не менее чем 70 % тестовых заданий;

Отметка «**удовлетворительно**» выставляется при условии правильного ответа не менее 50 %;

Отметка «**неудовлетворительно**» выставляется при условии правильного ответа менее чем на 50 % тестовых заданий.

Результаты текущего контроля используются при проведении промежуточной аттестации